Leçon 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Références : Rombaldi, Perrin, Caldero (pour décomposit° polaire et exp : $S_n \to S_n^{++}$ ...)

I - Espaces euclidiens
1) Orthogonalité, projections, symétries
2) Adjoint d'un endomorphisme

II - Endomorphismes orthogonaux - matrices orthogonales
1) Définitions et propriétés
2) Réduction des endomorphismes orthogonaux
3) Générateurs de O(E) et application à la dimension 2 et 3

III - Endomorphismes symétriques
1) Définition et premières propriétés
2) Réduction des endomorphismes symétriques
3) Endomorphismes symétriques positifs et définis positifs

IV - Endomorphismes normaux
1) Définition et propriétés
2) Réduction des endomorphismes normaux

DEV 1 : Théorème de Cartan - Dieudonné

DEV 2 : Diagonalisation des endomorphismes normaux

Leçon 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien (de dimension finie)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I - Espaces euclidiens

On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$

1) Orthogonalité, projections et symétries [ROM]

THM 1 : (Cauchy-Schwarz) : Pour tous $x, y \in E$, $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$. L'égalité est vraie si et seulement si : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda y$.

DEF 2 : Deux vecteurs x et y sont orthogonaux lorsque $\langle x|y\rangle = 0$. On définit $F^\perp = \{x \in E / \forall y \in F, \langle x|y\rangle = 0\}$

THM 3 : (Pythagore) Les vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

THM 4 : (Projection orthogonale) Soit F un sev de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$, $\|x-y\| = \inf\{\|x-z\| / z \in F\}$. Ce vecteur est également l'unique $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$. Si $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base orthonormée de F, alors on a : $p_F(x) = y = \sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i\rangle e_i$.

EX 5 : Si $D = \mathrm{Vect}(a)$, $\forall x \in E$, $p_D(x) = \langle x | \frac{a}{\|a\|}\rangle \frac{a}{\|a\|}$.

COR 6 : Pour tout sev F de E, on a $E = F \oplus F^\perp$

DEF 7 : On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

2) Adjoint d'un endomorphisme [ROM]

THM 8 : (Représentation de Riesz) L'application suivante :
$\varphi : E \to E^*$, $y \mapsto \varphi_y : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x|y\rangle$ est une isométrie linéaire surjective.

COR 9 : Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x)|y\rangle = \langle x|u^*(y)\rangle$.

DEF 10 : u^* est appelé l'adjoint de u.

PROP 11 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On a les propriétés : $\cdot (\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$ $\cdot (u^*)^* = u$ $\cdot (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

PROP 12 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors : si $u \in GL(E)$, $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$, $\ker(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$ et $\mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$, $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^*)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

II - Endomorphismes orthogonaux - matrices orthogonales

1) Définitions et propriétés [ROM]

DEF 13 : On appelle endomorphisme orthogonal tout $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle$.

PROP 12 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal si et seulement si u est une isométrie : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

PROP 13 : L'ensemble $O(E)$ des isométries est un sous-groupe de $GL(E)$ pour la composition appelé groupe orthogonal.

THM 14 : Soit $u \in O(E)$. Si F est un sev de E stable par u, alors son orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u.

THM 15 : Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. $u \in O(E) \Leftrightarrow u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E.

THM 16 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in O(E)$ si et seulement si sa matrice A dans une base orthonormée vérifie ${}^tAA = A{}^tA = I_n$

DEF 17 : Une telle matrice est dite orthogonale.

PROP 18 : L'ensemble des matrices orthogonales forme un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ noté $O_n(\mathbb{R})$.

THM 19 : Pour tout $A \in O_n(\mathbb{R})$, $\det(A) \in \{-1; 1\}$.

THM 20 : Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est compact. Ses composantes connexes sont $O_n^+(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$.

2) Réduction des endomorphismes orthogonaux [ROM]

PROP 21 : Les seules valeurs propres réelles possibles pour $u \in O(E)$ sont -1 ou 1.

PROP 22 : Les sous-espaces propres de $u \in O(E)$ sont en somme directe orthogonale.

PROP 23 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u admet au moins une droite stable ou un plan stable.

THM 24 : Soit $u \in O(E)$ avec $n \geq 2$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} I_p & & & & (0) \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R_r \end{pmatrix} \quad \text{où pour tout } k \in [\![1;r]\!], \quad R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$$

avec $\theta_k \in]0;2\pi[\setminus \{\pi\}$, $p+q+2r=n$.

[PER]

3) Générateurs de $O(E)$ et application à la dimension 2 et 3

DEF 25 : On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

DEV 1

THM 26 : Le groupe $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément, si $u \in O(E)$, alors u est produit d'au plus r réflexions où $r = rg(u - Id_E)$ et ce nombre est minimal.

THM 27 : Pour $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements (symétrie par rapport à un sous-espace de codimension 2)

PROP 28 : On suppose que $\dim(E) = 2$. Soit $u \in O(E)$
- Si $u \notin SO(E)$ (isométrie négative), u est une réflexion
- Si $u \in SO(E)$ (u est alors une rotation), $u = \tau_1 \tau_2$ où les τ_i sont des réflexions
- Soient $\rho \in SO(E)$, $\tau \notin SO(E)$, alors $\tau \rho \tau^{-1} = \rho^{-1}$
- Le groupe $SO(E)$ des rotations est commutatif (donc aussi $SO_2(\mathbb{R})$).

PROP 29 : Dans toute base $\mathcal{B}$ orthonormée, $u \in SO(E)$ a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $u \notin SO(E)$ a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

PROP 30 : On suppose que $\dim(E) = 3$ et $u \in O(E)$.
- Si $u \in SO(E)$, alors soit $u = Id_E$ ou il existe une BON $\mathcal{B}_1$ telle que $Mat_{\mathcal{B}_1}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (renversement) ou il existe une BON $\mathcal{B}_2$ telle que $Mat_{\mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, rotation d'axe $Vect(e_1)$.
- Si $u \notin SO(E)$, alors $u = -Id_E$ ou il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (réflexion) ou il existe une BON $\mathcal{B}$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (composée d'une réflexion et d'une rotation).

III - Endomorphismes symétriques

1) Définition et premières propriétés [Rom]

DEF 31 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est symétrique lorsque : $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$. On note $\mathcal{S}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques.

THM 32 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique i.e vérifie ${}^tA = A$.

COR 33 : $\dim(\mathcal{S}(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$.

PROP 34 : $\mathcal{L}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$ (matrices antisymétriques)

2) Réduction des endomorphismes symétriques [Rom]

LEMME 35 : Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.

LEMME 36 : Si $n \geq 2$, si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de $u \in \mathcal{S}(E)$, alors les espaces E_λ et E_μ sont orthogonaux.

LEMME 37 : Soit F un sev stable par $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors $F^\perp$ est stable par u.

THM 38 : (spectral) Tout endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$ est diagonalisable dans une base orthonormée. Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable : $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $A = PD{}^tP$ (D diagonale)

EX 39 : Ce n'est plus vrai si A est symétrique complexe en général, $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

REM 40 : En pratique, on trouve une base de vecteurs propres qu'on orthonormalise par Gram - Schmidt.

[ROT] [CAL]

3) Endomorphismes symétriques positifs et définis positifs

DEF 41: $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique positif (resp. défini positif) lorsqu'il est symétrique et pour tout $x \in E$, $\langle u(x) | x \rangle \geq 0$ (resp >0). On note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$ leur ensemble)

THM 42: Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. On a $u \in \mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) si et seulement si toutes ses valeurs sont positives (resp. strictement positives)

COR 43: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = {}^tBB$.

THM 44: Une matrice symétrique est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs

COR 45: $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

THM 46 (Décomposition polaire) Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = \Omega S$ où Ω est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive. L'application $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \Omega S$ est un homéomorphisme.

LEMME 47. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \rho(A)$ où $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$ et $\| \, \|$ la norme induite par la norme euclidienne

LEMME 48: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

THM 49: $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

IV - Endomorphismes normaux [ROT]

1) Définition et propriétés

DEF 50: $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal lorsque $u^* \circ u = u \circ u^*$.

EX 51: Les endomorphismes symétriques, antisymétriques, orthogonaux, ainsi que les similitudes sont des endomorphismes normaux.

LEMME 52: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal et F un sev de E stable par u. Alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

2) Réduction des endomorphismes normaux [ROT] Dev 2

LEMME 53: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal avec $\dim(E) = 2$. On suppose que u est sans valeur propre réelle. Alors dans toute base $\mathcal{B}$ orthonormée de E, $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $b \neq 0$

THM 54: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & R_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & R_s \end{pmatrix}$$

avec : $\forall i \in [\![1; r]\!]$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\forall i \in [\![1; s]\!]$, $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$